

Das Verhalten toroidaler elektrischer Lichtbögen *

A. WYNANDS **, H. DRUXES und G. SCHMITZ

I. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 26 a, 693—699 [1971]; eingegangen am 7. November 1970)

The Behaviour of Toroidal Electric Arcs

A wall-stabilized electric arc in an uniform bent tube is investigated. By the asymmetry of Ohmic heating and heat conductivity through the wall a displacement of the maximum of temperature is caused into the direction of the center of curvature, contrary to cylindrically symmetric geometries. By this an asymmetry of the thermal, electric and magnetic quantities is generated and produces a mass flux through the cross-section of the tube. A double whirl is formed by the self-magnetic Lorentz-forces.

This convective heat flow displaces the maximum of temperature back into the direction of the outer wall. Both influences are investigated and the final position of the maximum of temperature is discussed in dependence on the arc parameters.

For numerical calculations the equations of continuity, motion, energy and the Maxwell's equations of electromagnetic field are solved simultaneously. Results for a nitrogen plasma at nearly atmospheric pressure are presented.

1. Einleitung

Diese Arbeit behandelt eine Gasaufheizmethode in einem gleichförmig gekrümmten wandstabilisierten Lichtbogen bei Atmosphärendruck. Die Ergebnisse sind relevant für elektrodenlose toroidale Entladungen. Solche Anordnungen haben den Vorteil, daß sie u. a. die bei geraden Bögen auftretenden störenden Endeffekte, wie z. B. Leistungsabfälle an den Elektroden, vermeiden können. Vorbereitende Experimente hierzu werden seit einiger Zeit in DAYTON¹, JUTPHAAS² und in München bei MAECKER³ durchgeführt. In Ergänzung zu früheren Arbeiten^{4,5} wird hier die Wechselwirkung der durch die eigenmagnetischen Lorentz-Kräfte induzierten Strömung mit den charakteristischen thermischen und elektrischen Größen diskutiert. Im Gegensatz zur kürzlich erschienenen Arbeit von NATHRATH⁶, in der die Verlagerung des Temperaturmaximums in einem toroidalen Argonplasma bei relativ kleinen Bogenströmen ($I_B \leq 20$ A) untersucht wurde, werden hier Ergebnisse der simultanen, numerischen Berechnung von Temperatur-, Strömungs- und Magnetfeldverteilungen in einem Stickstoffplasma bei relativ hohen

Bogenströmen mitgeteilt. Die Untersuchungen basieren auf einer elektromagnetogasdynamischen Kontinuumstheorie.

Das zur numerischen Lösung des Torusproblems angewandte Verfahren eignet sich darüber hinaus in abgewandelter Form auch zur mathematischen Erfassung der thermischen und dynamischen Größen in Bogenentladungen mit transversaler Gasströmung und äußerem Magnetfeld.

2. Geometrie und Voraussetzungen

Die zu behandelnde Geometrie und die verwendeten Koordinaten zeigt Abb. 1.

Als Vorgabeparameter werden gewählt:

Der Bogenstrom I_B , der durch das im Torus eingeschlossene Arbeitsgas fließt,
eine konstante Wandtemperatur T_w ,
der Krümmungsradius R und
der Querschnittsradius a .

Durch diese Größen ist das Lichtbogenverhalten eindeutig festgelegt.

* Auszugsweise vorgetragen beim Thermodynamik-Kolloquium des VDI in Würzburg, Okt. 1970.

** Sonderdruckanforderungen an A. WYNANDS, I. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Aachen, D-5100 Aachen, Templergraben 55.

¹ E. E. SOEHNGEN, private Mitteilungen, ARL-Wright Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio.

² FOM-Institut voor Plasma-Fysica, Jutphaas, Niederlande (private Mitteilungen).

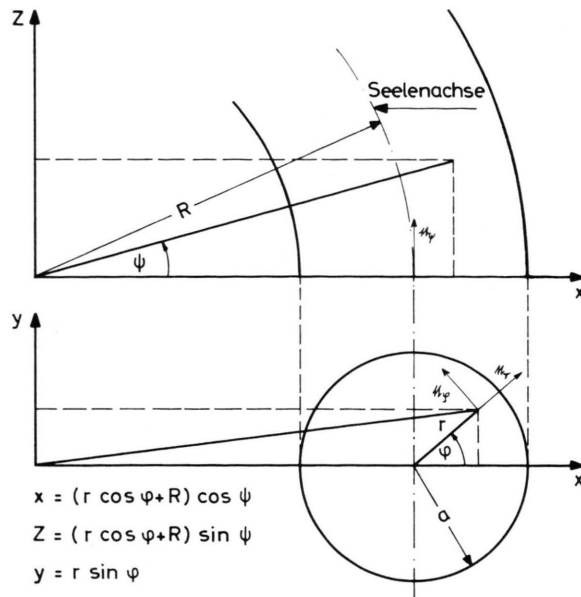
³ N. NATHRATH, Die Verlagerung eines wandstabilisierten Lichtbogens durch Krümmung, Vortrag Frühjahrstagung der DPG, Stuttgart 1968.

⁴ R. KRICHEL, Dissertation, Aachen 1970.

⁵ A. WYNANDS, H. DRUXES u. G. SCHMITZ, Z. Phys. **239**, 306 [1970].

⁶ N. NATHRATH, Z. Naturforsch. **25 a**, 1609 [1970].





Torusgeometrie

Abb. 1. Torusgeometrie und beschreibendes Koordinatensystem
 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y$; $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\psi$.
 (verallgemeinerte Zylinderkoordinaten).

Der elektrische Strom habe nur eine Komponente in \mathbf{e}_ψ -Richtung. Ferner sollen Temperatur- und Stromdichtegradient in Richtung der Seelenachse verschwinden. Die hier zu untersuchenden thermischen und elektrischen Größen sind dann invariant gegenüber Drehungen um die y -Achse. Zur mathematischen Erfassung eines solchen Torusplasmas bedienen wir uns des Einflüssigkeitsmodells der Plasmaphysik unter der Annahme eines quasineutralen, optisch dünnen Gases im thermischen Gleichgewicht⁷⁻¹⁰. Die in dieser Arbeit verwendeten Gleichungen sind:

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}(\varrho_m \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

Impulsgleichung

$$\varrho_m \left(\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) = -\operatorname{grad} p + \mathbf{j} \times \mathfrak{B} + \operatorname{div} \tau, \quad (2)$$

Energiegleichung

$$\varrho_m c_p \mathbf{v} \operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \mathbf{j} \cdot \mathfrak{E} - \bar{u}, \quad (3)$$

⁷ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Handbuch d. Physik, Bd. XXII, Springer-Verlag, Berlin 1965.

⁸ S.-I. PAI, Magnetogasdynamics and Plasmadynamics, Springer-Verlag, Wien 1962.

Ohmsches Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \mathfrak{E}, \quad (4)$$

Maxwell-Beziehungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathbf{j}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \quad (7)$$

$$\mathfrak{B} = \mu_{\text{el}} \mathfrak{H}. \quad (8)$$

τ ist hierbei der Spannungstensor⁸ und \bar{u} die pro Zeit und Volumeneinheit emittierte transparente Strahlungsenergie. Die übrigen Symbole haben die allgemein übliche Bedeutung.

3. Unsymmetrie der elektrischen Feldstärke und ihre Wirkung

Die Lösung des Induktionsgesetzes zeigt, daß die Feldstärke zwar wie beim zylindersymmetrischen Bogen^{9,10} wegen $\mathbf{j} = j_\psi \mathbf{e}_\psi$ nur eine einzige von Null verschiedene Komponente hat, diese aber im Gegensatz zum geraden Bogen nicht über den Bogenquerschnitt konstant ist, sondern in hyperbolischer Form von innen nach außen abnimmt. Dies ist in Abb. 2 dargestellt. Die Konstante $E_0(I_B, T_w, a, R/a)$ wird so berechnet, daß sie für den Grenzfall $R/a \rightarrow \infty$, d. h. bei krümmungsloser Geometrie, mit der Feldstärke des entsprechenden zylindersymmetrischen Bogens übereinstimmt.

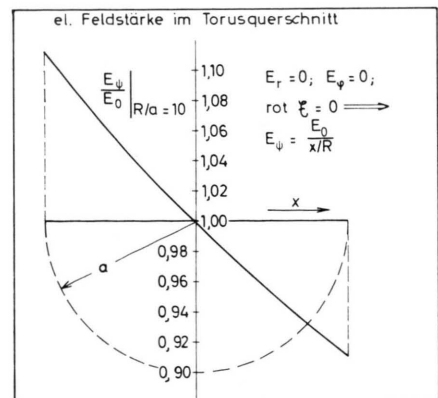


Abb. 2. Die elektrische Feldstärke im Torusquerschnitt.

⁹ H. J. PATT, Dissertation, Aachen 1964.

¹⁰ H. DRUXES, Dissertation, Aachen 1966.

Für ein Krümmungsverhältnis $R/a = 10$ beträgt der relative Unterschied zwischen der elektrischen Feldstärke an der Torusinnenseite ($x = R - a$) und der an der -außenseite ($x = R + a$) ca. 20%. Dadurch ist die Ohmsche Aufheizung in der linken Querschnittshälfte größer als in der rechten. Das ist die Hauptursache für eine Unsymmetrie von Stromdichte, Magnetfeld und Temperaturverteilung im Krümmungsquerschnitt. Diese Unsymmetrie, als deren charakteristisches Merkmal wir die Verlagerung des Temperaturmaximums betrachten wollen, wird noch verstärkt durch die (im Vergleich zum geraden Bogen) kleinere Torusinnen- als Torusaußenfläche und die damit verbundene ungleiche Kühlung an der Wand. Betrachtet man vorerst den Fall eines ruhenden, durch Ohmsche Wärmezufuhr erhitzten Arbeitsgases im Torus, so ist eine Verlagerung des Temperaturmaximums zum Krümmungsmittelpunkt hin zu erwarten. Dieser Fall eines als ruhend angenommenen Plasmas im Torus ist ausführlich in der Arbeit von KRICHEL⁴ behandelt.

Dieser Verschiebung der Temperaturverteilung wirkt aber eine induzierte magnetogasdynamische Strömung entgegen, die das Plasma zur Außenwand des Krümmers zurückdrängt⁵. Die hierdurch bewirkte Plasmaströmung wird an der stabilisierenden Wand gebremst, der Plasmastrom teilt sich und strömt entlang der Wand zum Krümmungsmittelpunkt hin. Es entsteht ein Doppelwirbel in der oberen und unteren Querschnittshälfte, der eine Durchmischung des Plasmas und damit eine Änderung der Temperaturverteilung gegenüber einem ruhenden Plasma bewirkt. Die Lage des Temperaturmaximums ist durch das Gleichgewicht dieser Effekte bestimmt.

Zur Lösung dieses Problems unter Berücksichtigung der Strömung müssen die Energiebilanz für das Wärmestrompotential, die Impulsbilanz und die Kontinuitätsgleichung für die Geschwindigkeitskomponenten sowie die Maxwell-Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Größen simultan gelöst werden. Die starke Kopplung dieser Gleichungen untereinander erschwert die Lösung erheblich.

4. Lösungsverfahren

Es soll hier kurz der Lösungsweg skizziert werden, ohne auf mathematische Einzelheiten einzugehen.

Bei der Berechnung eines Stickstoffplasmas wurden tabellarisch vorliegende Materialfunktionen^{9, 11} für die elektrische Leitfähigkeit σ , die spezifische Abstrahlung \bar{u} , die Massendichte ϱ_m , den Quotient aus spezifischer Wärme bei konstantem Druck und Wärmeleitfähigkeit c_p/κ sowie die Zähigkeit μ in Abhängigkeit von der Temperatur bzw. dem Wärmestrompotential S benutzt. Die Druckabhängigkeit der Materialfunktionen kann vernachlässigt⁷⁻¹⁰ werden.

Durch die Einführung der S -Funktion¹²

$$S = \int_0^T \kappa(T', p_0) dT'$$

an Stelle der Temperatur T vereinfacht sich die Energiebilanz erheblich. Nach Transformation von Gl. (3) auf verallgemeinerte Zylinderkoordinaten (vgl. Abb. 1) erhält man:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \varphi + R} - \varrho_m \frac{c_p}{\kappa} u \right) \frac{\partial S}{\partial r} \quad (9)$$

$$- \left(\frac{\sin \varphi}{r(r \cos \varphi + R)} + \varrho_m \frac{c_p}{\kappa} \frac{v}{r} \right) \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \bar{u}(S) - \sigma(S) \cdot E_\varphi^2.$$

Es bedeuten u und v die Radial- bzw. Azimutalkomponente der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Bei vorgegebenem Bogenstrom I_B kann die elektrische Feldstärke E_φ aus der Energiegleichung eliminiert werden. Aus dem Induktionsgesetz folgt (vgl. Abb. 2):

$$E_\varphi = \frac{E_0}{r/R \cos \varphi + 1}.$$

Das Integral der Stromdichte $j_\varphi = \sigma(S) E_\varphi$ über dem Bogenquerschnitt muß gleich dem Vorgabeparameter I_B sein. Daraus folgt:

$$E_0 = \frac{I_B}{2 \int_0^a \int_0^\pi \frac{\sigma(S(r, \varphi))}{(r/R) \cos \varphi + 1} r d\varphi dr}.$$

Bei der Berechnung des Magnetfeldes, welches bei bekannter elektrischer Feldstärke und gegebener Temperaturverteilung, d. h. nach gelöster Energiebilanz und damit vorliegender Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(S)$ eindeutig bestimmt ist, führen wir eine magnetische Stromfunktion Φ so ein, daß durch diese $\text{div } \mathfrak{H} = 0$ identisch erfüllt ist. Die φ -Komponente des Durchflutungsgesetzes $\text{rot } \mathfrak{H} = \mathbf{j}$ liefert dann zur Berechnung dieser Funktion eine elliptische Differentialgleichung. Die Randbedingungen für Φ erhält man aus der Tatsache, daß die

¹¹ I. BUES, H. J. PATT u. J. RICHTER, Z. Angew. Phys. **22**, 345 [1967].

¹² G. SCHMITZ, Z. Naturforsch. **5a**, 571 [1950].

Radiuskomponente des Magnetfeldes auf der x -Achse (Symmetrieachse) verschwindet und das Integral über die Azimutalkomponente des Magnetfeldes längs der Toruswand dem gesamten Bogenstrom entsprechen muß.

Als Definitionsgleichung der magnetischen Stromfunktion erhält man:

$$H_r = - \frac{1}{r[(r/R) \cos \varphi + 1]} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad (10a)$$

$$H_\varphi = \frac{1}{(r/R) \cos \varphi + 1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (10b)$$

Für Φ folgt hiernach die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos \varphi}{r \cos \varphi + R} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r(r \cos \varphi + R)} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\sigma(S) E_0. \quad (10c)$$

Durch Rotorbildung kann auch die in unserem Falle zweidimensionale Impulsbilanz in eine elliptische Differentialgleichung für eine skalare Funktion umgeformt werden. Hierbei verschwindet zunächst der Druckterm. Führt man eine Wirbelfunktion \mathfrak{w} durch $\text{rot } \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ ein, dann kann die so abgeänderte Impulsbilanz als Differentialgleichung für die einzige nicht verschwindende ψ -Komponente w von \mathfrak{w} aufgefaßt werden:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \varphi + R} \right) \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r(r \cos \varphi + R)} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{w}{(r \cos \varphi + R)^2} = - \frac{1}{\mu} \{ \text{rot } \mathfrak{j} \times \mathfrak{B} |_{\psi} + \mathfrak{a}_\psi \}. \quad (11)$$

\mathfrak{a}_ψ ist die ψ -Komponente eines Vektors, der die Trägheitsglieder und alle in der durch Rotorbildung umgeformten Impulsgleichung auftretenden Gradienten der Zähigkeit enthält. Da der Einfluß der Trägheits- und Zähigkeitskräfte gegenüber dem der Lorentz-Kräfte gering ist, kann \mathfrak{a}_ψ als Restglied aufgefaßt werden, welches die Wirbelfunktion und damit die Geschwindigkeitsverteilung nur unwesentlich beeinflußt.

Für das Restglied folgt aus Gl. (2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = & -\text{rot}[\varrho_m(\tfrac{1}{2} \text{ grad } \mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v} \times \text{rot } \mathfrak{v})] \\ & - \text{div}(\text{grad } \mu) \text{ rot } \mathfrak{v} \\ & + \text{grad } \mu \times (\text{grad div } \mathfrak{v} - \text{rot rot } \mathfrak{v}) \\ & - \text{grad}(\text{div grad } \mu) \times \mathfrak{v} \\ & + \text{rot}[\text{rot}(\mathfrak{v} \times \text{grad } \mu)]. \end{aligned}$$

Weiterhin verwenden wir zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes in unserem zweidimensionalen Problem eine Stromfunktion Ψ , die so definiert wird, daß sie die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt. Diese Funktion wird in die Definitionsgleichung für die Wirbelfunktion eingesetzt. Man erhält ebenfalls eine elliptische Differentialgleichung für die skalare Stromfunktion. Ihre Lösung ist nach vorausgehender Berechnung der Wirbelfunktion unter Berücksichtigung der Randbedingungen eindeutig bestimmbar.

Die Stromfunktion wird definiert durch:

$$u = - \frac{1}{r[(r/R) \cos \varphi + 1]} \frac{1}{\varrho_m} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad (12a)$$

$$v = \frac{1}{(r/R) \cos \varphi + 1} \frac{1}{\varrho_m} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (12b)$$

Aus $\text{rot } \mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos \varphi}{r \cos \varphi + R} - \frac{1}{\varrho_m} \frac{\partial \varrho_m}{\partial r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ + \left(\frac{\sin \varphi}{r(r \cos \varphi + R)} - \frac{1}{r^2 \varrho_m} \frac{\partial \varrho_m}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \\ = - \varrho_m((r/R) \cos \varphi + 1) w. \end{aligned} \quad (12c)$$

Die Randbedingungen für die Wirbel- und Stromfunktion erhält man aus der Haftbedingung an der Toruswand, d. h.

$$u(r=a, \varphi) = v(r=a, \varphi) = 0$$

und der Symmetrie des Strömungsfeldes bezüglich der x -Achse, d. h.

$$\begin{aligned} v(r, \varphi=0) = v(r, \varphi=\pi) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Die mathematische Erfassung eines Torusplasmas konzentriert sich demnach auf die Berechnung der vier miteinander stark gekoppelten, quasilinearen, elliptischen Differentialgleichungen (9), (10c), (11), (12c). Zur numerischen Berechnung wurden diese in konsistente Differenzengleichungen^{13, 14} mit einem Fehler der Ordnung $O(\Delta r^2)$ überführt, welche nach einer iterativen Methode, die in die Gruppe der Newtonschen Näherungsverfahren^{15, 16} einzuordnen ist, simultan gelöst wurden.

¹³ S. NAGEL, Dissertation, Aachen 1969.

¹⁴ G. A. KORN u. I. M. KORN, Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill Book Comp., New York 1961.

¹⁵ R. S. VARGA, Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1962.

¹⁶ R. SAUER u. I. SZABO, Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil II, Springer-Verlag, Berlin 1969.

5. Ergebnisse

Nach diesen mathematischen Betrachtungen soll an Hand der Ergebnisse durchgeführter numerischer Berechnungen der Einfluß der Krümmung auf ein wandstabilisiertes Stickstoffplasma betrachtet werden. Abbildung 3 zeigt die Verschiebung des Temperaturmaximums in Abhängigkeit vom Krümmungsradius R . Vernachlässigt man bei der Berechnung der Temperaturverteilung die Strömung, so wandert das Maximum wegen der größeren Leistungszufuhr und geringeren Kühlung in der linken Hälfte des Torusquerschnitts zum Krümmungsmittelpunkt hin⁴⁻⁶. Die einsetzende Konvektion auf Grund der asymmetrischen Lorentz-Kräfte jedoch bewirkt eine genau entgegengesetzte Verlagerung. Dieser Effekt überwiegt bei den in diesem Bild berücksichtigten Bogenströmen, so daß sich das Temperaturmaximum rechts von der Torusseele [d. h. bei $x(T_{\max}) > R$ bzw. auf dem Querschnittsradius $\varphi = 0$] einstellt. Die bei größerem Strom stärkere Verschiebung des heißen Bogenkerns beruht darauf, daß der magnetische Druck als Ursache des konvektiven Wärmetransports quadratisch mit der Magnetfeldstärke anwächst. Für Vorgabeparameter $R = 5$ cm, $a = 0,5$ cm, $I_B \leq 20$ A ergaben die numerischen Rechnungen, daß die Auswirkung der größeren elektrischen Feldstärke und kleineren Kühlfläche in der linken Querschnittshälfte auf die Temperaturverschiebung den Effekt der auftretenden Strömung auf diese überwiegt, d. h. das Temperaturmaximum stellte sich für Bogenströme $I_B \leq 20$ A * links von der Torusseele ein. Die gestrichelten Linien kennzeichnen den Ort des Temperaturmaximums bei Vernachlässigung von Strömungseffekten. Für diesen Fall braucht nur die Energiebilanz [Gl. (9 a)] mit der Vereinfachung $u = v = 0$ gelöst zu werden. Die eingezeichneten numerischen Ergebnisse, die nur sehr schwach vom vorgegebenen Bogenstrom abhängen, sind Mittelwerte der Temperaturverschiebung für den Bereich $20 \leq I_B/A \leq 100$. Sie stimmen mit den Ergebnissen in⁴ überein.

Die Kurve „Modelltheorie“ bezieht sich auf eine von uns vorgeschlagene analytische Beschreibung eines als ruhend angenommenen Torusplasmas⁵.

Der Vergleich der gestrichelten und durchgezogenen Kurven zeigt, daß zur Erfassung der realen Verhältnisse im Torusquerschnitt der einsetzende konvektive Wärmetransport berücksichtigt werden muß.

* Ähnlich wie bei den von NATHRATH⁶ untersuchten Lichtbögen.

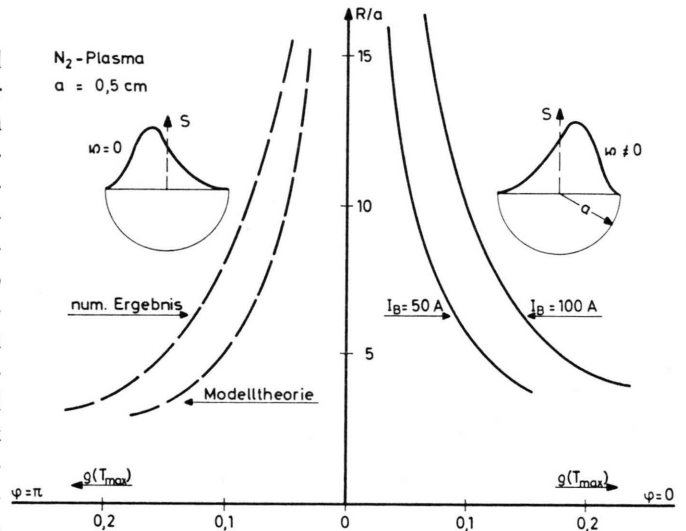


Abb. 3. Verlagerung des Temperaturmaximums in einem Stickstoffplasma bei Vernachlässigung bzw. Berücksichtigung des konvektiven Wärmetransports in Abhängigkeit von der Krümmung.

Einen Überblick über das gesamte elektrische, magnetische, thermische und dynamische Verhalten eines Stickstoffplasmas in einem Krümmer vermittelt Abb. 4. Das Temperaturmaximum ist um ca. 10% des Querschnittsradius nach außen verschoben. Eine entsprechende Verschiebung ist im azimuthalen Magnetfeld und in der Stromdichte zu beobachten. Durch die Strömung wird also der gesamte heiße Bogenkern zur Außenwand hin gedrängt. Als Bogenkern kann man den Bereich betrachten, der zwischen den Extrema des Magnetfeldes liegt. Den halben Abstand dieser Extrema voneinander nennen wir in Anlehnung an frühere Arbeiten^{9,10} den effektiven Bogenradius $r_{\text{eff}} = a \varrho_{\text{eff}}$. Man sieht am Verlauf der Stromdichtekurve, daß innerhalb dieses Bereiches, der im Bild als Halbkreis eingezeichnet ist, der überwiegende Teil der Ohmschen Aufheizung erfolgt. Im Gebiet zwischen Bogenkern und gekühlter Wand ist die elektrische Leitfähigkeit auf Grund der geringen Temperatur und der daraus folgenden geringen Ionisationsrate relativ klein. Die Kurve für j_{φ} gestattet wegen $1 - a/R \leq E_0/E_{\varphi} \leq 1 + a/R$, d. h. im Vergleich zur Stromdichte nahezu konstante elektrische Feldstärke, direkte Aussagen über die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(S(r, \varphi))$ und die Energiezufuhr pro Volumenelement σE_{φ}^2 .

Aus der Kurve für die Radialgeschwindigkeit erkennt man, daß das Plasma durch den magnetischen Druck von der Innenseite des Krümmers bis zur

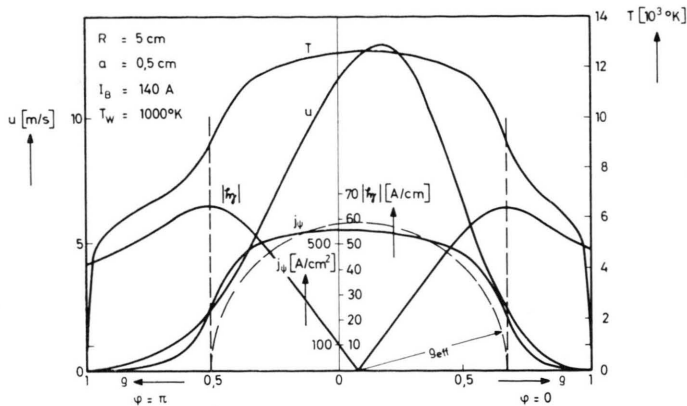


Abb. 4. Die Absolutbeträge der Radialgeschwindigkeit u , der Stromdichte j_r , und des Magnetfeldes B sowie die Temperatur T auf der Symmetrieachse (x -Achse) im Querschnitt eines toroidalen Stickstoffplasmas.

Nullstelle des Magnetfeldes beschleunigt wird. Danach setzt wegen der Umkehr des Magnetfeldes eine Abbremsung ein. Der Umschlag von der positiven zur negativen Steigung der Kurve, d. h. das Erreichen der Maximalgeschwindigkeit von ca. 13 m/s, erfolgt wegen der berücksichtigten Trägheitsterme nach Passieren des Bogenkernzentrums.

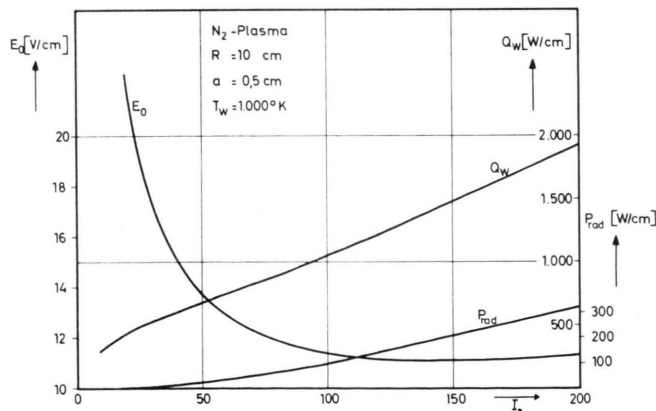


Abb. 5. Thermische Wandbelastung Q_W und Abstrahlung P_{rad} pro Bogenlänge ($R \cdot \Delta\psi = 1$ cm) sowie elektrische Feldstärke im Querschnittsmittelpunkt E_0 als Funktionen des Bogenstroms I_B .

Für die Konstruktion und den Betrieb von Bogenheizgeräten sind Aussagen über zugeführte Wärmeleistung, thermische Wandbelastung und Strahlungsverluste von Bedeutung. In Abb. 5 sind für ein Stickstoffplasma die elektrische Feldstärke E_0 , die an die Wand pro cm Bogenlänge abgegebene Wärmeenergie Q_W und die Abstrahlung P_{rad} pro cm Bogenlänge in Abhängigkeit von I_B aufgetragen. Man sieht, daß

bei der hier betrachteten Geometrie der überwiegende Anteil der in den Bogen hineingesteckten Energie durch konduktive Wärmeleitung durch die Wand abgeführt werden muß. Die Ergebnisse für die hier angegebene gesamte thermische Wandbelastung Q_W und für die Abstrahlung P_{rad} weichen nur unwesentlich von den Werten für entsprechende zylindersymmetrische Bögen ab.

Zur $E-I$ -Charakteristik in einer Torusgeometrie ist zu sagen, daß die über den Querschnitt gemittelte elektrische Feldstärke

$$\bar{E} = 2 E_0 (R/a)^2 \{1 - \sqrt{1 - (a/R)^2}\}$$

im Krümmer grundsätzlich höher ist als im entsprechenden geraden Bogen, wenn das Temperaturmaximum rechts von der Seelenachse ($x > R$) liegt, d. h. die im Krümmer verbrauchte Energie ist dann höher als im zylindrischen Rohr. Die erhöhte Leistungszufuhr wird z. Tl. im vergrößerten Volumen des heißen Bogenkerns und im entstehenden Doppelwirbel verbraucht, der seinerseits für eine Durchmischung und damit gleichmäßigeren Erhitzung des Torusplasmas sorgt als es im zylindersymmetrischen Bogen der Fall ist.

Für eine anschauliche Darstellung des thermischen und dynamischen Verhaltens eines Plasmas im Querschnitt eines gleichmäßigen Krümmers eignen sich am besten Isothermen und Stromlinien. Abbildung 6 zeigt für ein Krümmungsverhältnis $R/a = 5/0,5 = 10$ diese Linien bei einem Bogenstrom von 80 A. Die eingezeichneten Isothermen sind gleichzeitig Linien gleichen Wärmestrompotentials. Die Isothermen sind (bis auf Zeichengenauigkeit) aus der Mitte mehr oder weniger weit hinausgeschobene Kreise. An der Torusaußenwand liegen diese enger als an der -innenwand, woraus man auf einen stärkeren Temperaturgradienten und damit höhere Wandbelastung

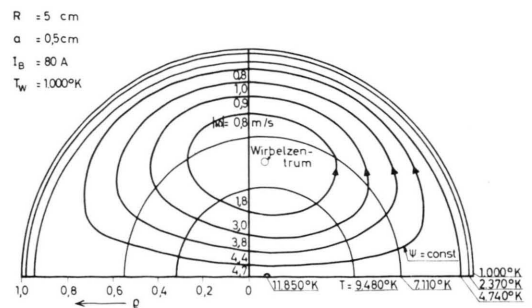


Abb. 6. Isothermen und Stromlinien im toroidalen Stickstoffplasma.

an dieser Stelle schließen kann. Diese Unsymmetrie in der Wärmeabfuhr ist jedoch wesentlich günstiger als man nach strömungslosen Rechnungen, die – wie oben gezeigt – eine Verlagerung des Temperaturmaximums zum Krümmungsmittelpunkt hin bewirken, erwarten konnte, weil die Außenseite wegen ihrer größeren Fläche mehr Wärme bei konstanter Kühlmitteltemperatur ableiten kann.

Die Stromlinien charakterisieren den im oberen und unteren Teil des Krümmers entstehenden Wirbel. Das zwischen zwei Stromlinien liegende Gebiet ist der Schnitt durch eine Stromröhre. Nach Definition der Ψ -Funktion werden die Stromlinien durch die Kurven $\Psi = \text{const}$ beschrieben. Die Differenz der Ψ -Werte benachbarter Stromlinien ist die durch eine Stromröhre pro cm Bogenlänge und Sekunde durchströmende Gasmenge M_S . Im dargestellten Beispiel beträgt diese „Umwälzrate“ $M_S \approx 0,16 \text{ mg/cm s}$. Wegen der gleichbleibenden Differenz $\Delta\Psi$ der eingezeichneten Stromlinien ist die in jeder Stromröhre umgewälzte Gasmenge gleich groß.

Die auf der Koordinatenlinie $\varphi = \pi/2$ eingetragenen Zahlen sind die Beträge der Strömungsgeschwindigkeit an den betreffenden Stellen in m/sec.

6. Schlußbemerkungen

Zum Schluß seien noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammengefaßt:

In einem gasgefüllten, gleichmäßig gekrümmten Rohr (Torus), in dem in Seelenrichtung ein elektrischer Strom fließt, nimmt die elektrische Feldstärke hyperbolisch mit wachsendem Abstand vom Krümmungszentrum ab. Hierdurch wird eine ungleiche Ohmsche Aufheizung des Gases bewirkt, die das Temperaturmaximum aus der Seelenachse in Richtung des Krümmungszentrums drängt. Dieser Effekt wird durch eine ungleichmäßige Wärmeabfuhr an der Wand verstärkt.

Die auftretende Unsymmetrie in den Lorentz-Kräften auf Grund des Eigenmagnetfeldes bewirkt in jedem Fall eine Strömung des Gases, die das Plasma entlang der x -Achse an die Außenwand drängt, es entsteht im Krümmungsquerschnitt ein Doppelwirbel.

Der hierbei einsetzende konvektive Wärmetransport drückt den heißen Bogenkern vom Krümmungsmittelpunkt weg. Für Maximaltemperaturen $T_{\text{max}} > 8000^\circ\text{K}$ (entspricht $I_B > 20 \text{ A}$) stellt sich z. B. bei $R = 5 \text{ cm}$ und $a = 0,5 \text{ cm}$ das Temperaturmaximum rechts von der Seelenachse ein. Die Verlagerung des Bogenkerns vom Krümmungsmittelpunkt weg wächst mit steigendem Bogenstrom I_B . Während bei relativ kleinen Stromdichten (z. B. $I_B < 20 \text{ A}$, $a = 0,5 \text{ cm}$) die Verlagerung des Bogenkerns zum Krümmungsmittelpunkt hin mit zunehmender Krümmung wächst⁶, ist bei größeren Stromdichten eine mit steigender Krümmung anwachsende Verlagerung in entgegengesetzter Richtung, d. h. zur Torusaußenseite hin, zu erwarten.

Durch Einführung der Stromfunktion können Aussagen über die pro cm Bogenlänge und Sekunde in einer Stromröhre umgewälzte Gasmenge gewonnen werden. Die quantitative Erfassung einer solchen Durchmischung eines aufgeheizten Mediums ist von großem Interesse z. B. auch beim Betrieb von Rinnen- und Ringtiegelöfen¹⁷ zum Erhitzen und Schmelzen von Metallen.

Die numerische Berechnung des vorliegenden Problems in relativ kurzen Rechenzeiten (ca. 6 min) wurde durch die Einführung der magnetischen Stromfunktion und der Wirbelfunktion sowie durch die Benutzung eines schnellen Digitalrechners (CD 6400 des Rechenzentrums der RWTH Aachen) ermöglicht.

¹⁷ K. H. BROKMEIER, Induktives Schmelzen, BBC, Mannheim 1966.